23/12/2020

Λήμμα (Εφαρμογή του διαγώνιου επιχειρήματος του Cantor):

Έστω $\{f_n\}$ μία ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων από έναν μετρικό χώρο X και $x_1, x_2, \ldots \in X$. Τότε $\exists \{h_n\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$, τ.ω. η πραγματική ακολουθία $\{h_n(x_k)\}$ να συγκλίνει, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: • $\exists M > 0$, τ.ω. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$.

• $\{f_n(x_1)\}$ φραγμένη $\xRightarrow{B-W}$ $\exists$ υπακολουθία $\{g_n^1\}$ της $\{f_n\}$, τ.ω. η $\{g_n^1(x_1)\}$ το $\lim\limits_n g_n^1(x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

• $\{g_n^1(x_2)\}$ φραγμένη $\xRightarrow{B-W}$ $\exists$ υπακολουθία $\{g_n^2\}$ της $\{g_n^1\}$ (άρα και της $\{f_n\}$), τ.ω. το $\lim\limits_n g_n^2(x_2)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

⋮

• $\{g_n^k(x_{k+1})\}$ φραγμένη $\xRightarrow{B-W}$ $\exists$ υπακολουθία $\{g_n^{k+1}\}$ της $\{g_n^k\}$ (άρα και όλων των προηγούμενων, άρα και της $\{f_n\}$), τ.ω. το $\lim_n g_n^{k+1}(\alpha_{k+1})$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

$$\vdots$$

$$\begin{array}{cccccc}
g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 & \cdots \\
g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_n^2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
g_1^k & g_2^k & \cdots & g_n^k & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
g_1^n & g_2^n & \cdots & g_n^n & \cdots
\end{array}$$

Θεωρούμε την "διαγώνια" ακολουθία $h_n := g_n^n$.

- Κάθε όρος της $\{g_n^n\}$ είναι όρος της $\{g_n^1\}$ (και μάλιστα g_n^n εμφανίζεται πριν από τον g_{n+1}^{n+1} στην ακολουθία $\{g_n^1\}$) $\Longrightarrow$ $\{g_n^n\}$ είναι υπακολουθία της $\{g_n^1\}$, άρα και της $\{f_n\}$.

- Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $n \geq k$. Τότε, επειδή $\{g_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ υπακολουθία της $\{g_m^k\}_{m=1}^{\infty}$ $\Longrightarrow$ g_n^n είναι όρος της ακολουθίας $\{g_n^k\}_{n=1}^{\infty}$.

Επίσης, $\{g_m^{n+1}\}_{m=1}^{\infty}$ υπακολουθία της $\{g_m^{k}\}_{m=1}^{\infty} \Rightarrow$

g_{n+1}^{n+1} είναι όρος της ακολουθίας $\{g_n^{k}\}_{n=1}^{\infty}$.

(που μάλιστα εμφανίζεται μετά τον g_n^n). κ.ο.κ.

(g_{n+2}^{n+2}, g_{n+3}^{n+3}, ... όροι της ακολουθίας $\{g_n^{k}\}_{n=1}^{\infty}$, που μάλιστα εμφανίζονται με αυτή τη σειρά).

$\Rightarrow \{g_n^n\}_{n\geq k}$ υπακολουθία της $\{g_n^{k}\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Rightarrow \lim_n g_n^n(x_k) = \lim_n g_n^k(x_k) \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lim_n h_n(x_k)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. ▨

<u>Πόρισμα 1</u> (του Θ. Arzela-Ascoli): Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{A}$ φραγμένο και ισοσυνεχές υποσύνολο του $(C(X), D)$. Τότε, κάθε ακολουθία από το $\mathcal{A}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. (ως προς την D)
(D ομοιομ. μετρική)

<u>Απόδειξη:</u> • $\exists M > 0$, τ.ω. $\|f\|_\infty \leq M$, $\forall f \in \mathcal{A}$.

• $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, τ.ω. $\forall f \in \mathcal{A}$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall y \in X$, με $d(x,y) < \delta$.

• Από Θ. Arzela-Ascoli, αρκεί νδο $\overline{\mathcal{A}}$ είναι φραγμένο (ως προς την D) και ισοσυνεχές σύνολο.

• Έστω $f \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq A$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

$\rightarrow \forall x \in X$, $|f(x)| = \lim_n |f_n(x)| \leq M$

$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq M, \forall f \in A \Rightarrow \overline{A}$ φραγμένο σύνολο (ως προς την ομοιόμορφη μετρική D.)

• Έστω $f \in \overline{A} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq A$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

Έστω επίσης $x \in X$. Τότε, $\forall y \in X$, με $d(x,y) < \delta(\varepsilon, x)$, ισχύει $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\xRightarrow{n \to \infty} \forall y \in X$, με $d(x,y) < \delta(\varepsilon, x)$, ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (αυτό ισχύει $\forall f \in \overline{A}$) $\Rightarrow \overline{A}$ ισοσυνεχές υποσύνολο του $(C(X), D)$. ▨

<u>Πόρισμα 2:</u> Έστω $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων από έναν συμπαγή μετρικό χώρο (X, d). Τότε, η $\{f_n\}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία.

Το Θεώρημα Stone-Weierstrass

<u>Ορισμός:</u> Έστω L μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στον μ.χ. X. Λέμε ότι η L διαχωρίζει τα σημεία του X, αν $\forall x, y \in X$, $(x \neq y)$ $\exists f \in L$, τ.ω. $f(x) \neq f(y)$.

Ορίζουμε, επίσης, την συνάρτηση $\mathbb{1}: X \to \mathbb{R}$, με τύπο $\mathbb{1}(x) = 1$.

<u>Θυμίζουμε:</u> $L \subseteq F(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ συναρτ.}\}$ χώρος συναρτήσεων (σε αυτήν την ενότητα θα ονομάζεται Lattice):

(i) L γραμμικός χώρος (ως προς τις συνήθεις πράξεις).

ii) $\forall f \in L,\ |f| \in L \ (\Longleftrightarrow \forall f,g \in L,\ f \vee g \in L$

$\Longleftrightarrow \forall f,g \in L,\ f \wedge g \in L)$.

<u>Λήμμα 1:</u> Έστω L ένας γραμμικός υποχώρος του $F(X)$, που διαχωρίζει τα σημεία του L και περιέχει την $\mathbb{1}$. Τότε, $\forall x,y \in X$ με $x \neq y$ και $\forall a,\beta \in \mathbb{R}$,

$\exists f \in L$, τ.ω. $f(x) = a$ και $f(y) = b$.

<u>Απόδειξη:</u> $\exists g \in L$, τ.ω. $g(x) \neq g(y)$. Θέτουμε

$f := \dfrac{(a-\beta)g + (bg(x) - a \cdot g(y)) \cdot \mathbb{1}}{g(x) - g(y)}$. Τότε, $f \in L$ και

$f(x) = a$, $f(y) = b$. ▨

<u>Λήμμα 2:</u> Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $L \subseteq C(X)$ ένας Lattice, που διαχωρίζει τα σημεία του X και περιέχει την $\mathbb{1}$. Τότε, για $g \in C(X)$, για $a \in X$ και για $\varepsilon > 0$, $\exists f \in L$, τ.ω. $f(a) = g(a)$ και $f > g - \varepsilon$.

<u>Απόδειξη:</u> Λήμμα 1 $\Longrightarrow \forall x \in X$, $\exists f_x \in L$, τ.ω.

$f_x(a) = g(a)$ και $f_x(x) = g(x) \Longrightarrow f_x(x) > g(x) - \varepsilon$

$\xrightarrow[\text{συνεχείς}]{f_x,\, g}$ $\exists$ περιοχή V_x του x, τ.ω. $f_x(y) > g(y) - \varepsilon$,

$\forall y \in V_x$, $\forall x \in X$.

• Όμως, $X = \bigcup_{x \in X} V_x \xrightarrow{X \text{ συμπαγής}} \exists\, x_1, \dots, x_n$, τ.ω.

$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$.

• Θέτουμε $f := f_{x_1} \vee \dots \vee f_{x_n}$. Τότε, $f \in L$ (επειδή L Lattice) και $f(a) = g(a)$.

Τέλος, αν $x \in X$, τότε $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, τ.ω. $x \in V_{x_i} \Longrightarrow f_{x_i}(x) > g(x) - \varepsilon. \Longrightarrow f(x) \geq f_{x_i}(x) > g(x) - \varepsilon$. $\boxtimes$

<u>Θεώρημα</u>: (Stone-Weierstrass για Lattices):
Έστω (X, d) συμπαγής μ.χ. και $L \subseteq C(X)$ Lattice που διαχωρίζει τα σημεία του X και περιέχει την $\mathbb{1}$. Τότε, $\overline{L} = C(X)$ (με την ομοιόμορφη μετρική).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $g \in C(X)$ και $\varepsilon > 0$. Αρκεί νδο $\exists f \in L$, τ.ω. $D(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon$.

• Λήμμα 2 $\Longrightarrow$ Έστω $x \in X$. Τότε, $\exists f_x \in L$, τ.ω. $f_x(x) = g(x)$ και $f_x > g - \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$f_x(x) < g(x) + \varepsilon$$

$\xRightarrow[\text{συνεχείς}]{f_x, g}$ $\exists$ περιοχή V_x του x, τ.ω. $f_x(y) < g(y) + \varepsilon$, $\forall y \in V_x, \forall x \in X$

• Όμως, $X = \bigcup\limits_{x \in X} V_x \Longrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in X$, τ.ω. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$.

• Θέτουμε $f := f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_n}$. Τότε, $f \in L$. (επειδή L Lattice)

• Έστω $y \in X$. Τότε, $f(y) = \min\{\underbrace{f_{x_1}(y)}_{> g(y) - \varepsilon}, \dots, \underbrace{f_{x_n}(y)}_{> g(y) - \varepsilon}\} > g(y) - \varepsilon. \Longrightarrow f > g - \varepsilon$.

• Έστω $x \in X$. Τότε, $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, τ.ω. $x \in V_{x_i} \Longrightarrow$

$$\underbrace{f_{x_i}(x)}_{\geq f(x)} < g(x) + \varepsilon \Longrightarrow f(x) < g(x) + \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

• Άρα, τελικά, $\forall x \in X$, ισχύει $g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x) + \varepsilon$

$$\Longrightarrow \sup\{\underbrace{|f(x) - g(x)|}_{} : x \in X\} \leq \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

$$= D(f, g)$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{A}$ κάποιος γραμμικός υπόχωρος του $F(X)$. Ο $\mathcal{A}$ θα λέγεται άλγεβρα (συναρτήσεων), αν $\forall f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{A}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής είναι άλγεβρα.

<u>Θεώρημα 2</u>: (Θεώρημα Stone–Weierstrass για άλγεβρες): Έστω (X, d) συμπαγής μ.χ. και $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ μία άλγεβρα που <u>διαχωρίζει</u> τα σημεία του X και περιέχει την 1. Τότε, $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$. (με την D).

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $\exists$ ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}$, τ.ω. $p_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στο $[a, b]$.

Λήμμα 3: Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{P_n\}$ (μίας μεταβλητής), τ.ω. $P_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στο $[0,1]$, όπου $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Απόδειξη του Θ.2: Θδο $\bar{A}$ Lattice. Τότε $\bar{A} \ni 1$ (αφού $\bar{A}\ni 1$) και $\bar{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του X (και $\bar{A}\subseteq C(X)$) (αφού A διαχωρίζει τα σημεία του X και $\bar{A}\supseteq A$), από Θ.1, $\bar{\bar{A}}=C(X) \Rightarrow \bar{A}=C(X)$.

• Πρώτα θδο $\bar{A}$ άλγεβρα και $\bar{A}\subseteq C(X)$.

Πράγματι, έστω $f,g\in\bar{A}$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Αρκεί νδο:

i) f συνεχής.

ii) $\lambda f+\mu g\in\bar{A}$ ($\Rightarrow \bar{A}$ γραμμικός υπόχωρος του $C(X)$ $\Rightarrow \bar{A}$ γραμμικός χώρος).

iii) $f\cdot g\in\bar{A}$. Γνωρίζουμε ότι $\exists\{f_n\},\{g_n\}\subseteq A$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$

$\Downarrow$

Αφού $A\subseteq C(X)$, άρα f_n συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$, άρα $f\in C(X)$. Άρα, το (i) αποδείχθηκε.

Επίσης, $\lambda f_n+\mu g_n\in A \xrightarrow[\text{Θωτ4}]{\text{Αστ.1}} \lambda f+\mu g\in\bar{A}$.

Άρα, το (ii) αποδείχθηκε.

Τέλος, (iii), $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Rightarrow \|f_n-f\|_\infty\to 0 \Rightarrow$

$\|f\|_\infty \le \|f_n-f\|_\infty+\|f\|_\infty \xRightarrow[\text{συγκ. άρα είναι φραγμ.}]{\{\|f_n-f\|_\infty\}} \{\|f_n\|_\infty\}$ φραγμ.

$\xrightarrow[\text{φραγμ.}]{\text{ομοιομ.}} \{f_n\}$

και ομοίως, $\{g_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη

$\xrightarrow[\text{φυλλ.4}]{\text{Ασκ.3}} f_n \cdot g_n \longrightarrow f \cdot g$.

Αλλά, $f_n \cdot g_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \cdot g \in \overline{\mathcal{A}}$

- Μένει νδο $\overline{\mathcal{A}}$ Lattice

Λήμμα 3 $\Rightarrow \exists \{P_n\}$ ακολουθία πολυωνύμων, τ.ω.

$P_n(x) \xrightarrow{\text{ομ.}} \sqrt{x}$ στο $[0,1]$.

Έστω $\underset{\neq 0}{f \in \overline{\mathcal{A}}} \xrightarrow{\overline{\mathcal{A}} \text{ άλγεβρα}} f^2 \in \overline{\mathcal{A}} \xrightarrow[\text{άλγεβρα}]{\overline{A}}$

$\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2} \in \overline{\mathcal{A}}$.

Όμως, $P_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right) \xrightarrow{\text{ομ.}} \sqrt{f^2/\|f\|_\infty^2} = \frac{|f|}{\|f\|_\infty}$

$\Longrightarrow \frac{f}{\|f\|_\infty} \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow |f| \in \overline{\mathcal{A}}$

Ασκήσεις: 1) Αν $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g \Rightarrow g_n \circ f \xrightarrow{\text{ομ.}} g \circ f$

2) Αν P πολυώνυμο και $h \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow$

$P \circ h \in \overline{\mathcal{A}}$.

$\boxtimes$

Απόδειξη του Λ3: Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία

$P_1 \equiv 0$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$, $x \in [0,1]$.

• Θδο. η $\{P_n\}$ είναι ακολουθία πολυωνύμων και ότι

$0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Με επαγωγή πάνω στο n.

• Για $n=1$ ισχύει

• Έστω ότι ισχύει για $n=k$: P_k πολυώνυμο και

$0 \leq P_k(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$.

• Θδο ισχύει για $n=k+1$:

$P_{k+1}(x)$ προφανώς πολυώνυμο. Επίσης,

$$P_{k+1}(x) = \underset{\overset{\vee\!\shortparallel}{0}}{P_k(x)} + \frac{1}{2}[x - \underset{\overset{\vee\!\shortparallel}{0}}{P_k(x)^2}] \geq 0$$

→ από υπόθεση επαγωγής

Άρα, μένει νδο $P_{k+1}(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$.

Έχουμε: $\sqrt{x} - P_{k+1}(x) = \sqrt{x} - P_k(x) - \frac{1}{2}(x - P_k(x)^2)$

$$= \sqrt{x} - P_k(x) - \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_k(x))(\sqrt{x} + P_k(x))$$

$$= \underbrace{(\sqrt{x} - P_k(x))}_{\geq 0}\underbrace{\Big(1 - \frac{1}{2}\underset{\leq 1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\underset{\leq \sqrt{x} \leq 1}{P_k(x)}\Big)}_{\geq 0} \geq 0, \ \forall x \in [0,1]$$

• Η $\{P_n\}$ είναι αύξουσα: $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2 \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. $\xrightarrow[\text{κ' φραγμ.}]{\{P_n\}\text{ αύξουσα}} \{P_n(x)\}$ συγκλίνει, $\forall x \in [0,1]$

Ονομάζουμε $f(x) = \lim_n P_n(x)$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) - \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) - \frac{1}{2}\left(x - f(x)^2\right)$$

$$P_{n+1}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

$$\Longrightarrow f(x)^2 = x, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\xrightarrow[f \geq 0]{P_n \geq 0} f(x) = \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1].$$

• Δείξαμε ότι $P_n(x) \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \sqrt{x}$

$$\xrightarrow[\sqrt{x} \text{ συνεχής, Dini}]{\{P_n\} \text{ αύξουσα}} P_n(x) \xrightarrow{o\mu.} \sqrt{x} \text{ στο } [0,1]. \ \blacksquare$$